

ЛЕСОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОМПЛЕКС. ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

УДК 539.37:630*36

С. А. Борисевич, В. С. Вихренко

Белорусский государственный технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ КРУЧЕНИЯ СТВОЛА ДЕРЕВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СХВАТОМ МАНИПУЛЯТОРА

В работе исследуется распределение напряжений изгиба и кручения в стволе дерева в процессе его взаимодействия со схватом манипулятора. Рассматривается модель ствола дерева в виде последовательности недеформируемых фрагментов, соединенных между собой упругими связями, которые учитывают деформации изгиба и кручения ствола. Для определения коэффициентов жесткости сочленений на кручение рассмотрена деформация кручения ствола дерева с учетом анизотропии древесины. Древесина является ортотропным материалом, однако его упругие свойства в радиальном и тангенциальном направлениях сильно отличаются от продольных и значительно меньше между собой. Поэтому в первом приближении последним пренебрегается, и материал ствола дерева рассматривается как трансверсально изотропный. Показано, что коэффициенты крутильной жесткости сочленений выражаются через модуль сдвига и обратно пропорциональны длине фрагментов, на которые разбивается ствол дерева. Рассмотрено движение спиленного дерева при равномерном подъеме его комля схватом манипулятора. Проанализированы возникающие в древесине максимальные напряжения изгиба и кручения.

Ключевые слова: ствол дерева, манипулятор, модель ствола дерева, кручение, изгиб, упругость, жесткость, напряжения кручения, напряжения изгиба, сила сопротивления, уравнения Лагранжа.

S. A. Borisevich, V. S. Vikhrenko

Belarusian State Technological University

BENDING AND TORSION STRESS DISTRIBUTION IN THE TREE STEM DURING ITS INTERACTION WITH A GRIPPER OF THE MANIPULATOR

In this paper the bending and torsion stress distribution in the tree stem during its interaction with a gripper of the manipulator is investigated. A model of a tree stem in the form of a sequence of non-deformable fragments interconnected by elastic connections that take into account bending and torsion of the stem is considered. To determine the coefficients of stiffness of the joints the torsional deformation of the tree stem is examined, taking into account the anisotropy of wood. Wood is an orthotropic material, but its elastic properties in the radial and tangential directions are very different from the longitudinal one and significantly less different between themselves. Therefore, in a first approximation, the latter is neglected, and the material of the tree stem is considered as transversely isotropic. It is shown that the coefficients of torsional stiffness of the joints are expressed through the shear modulus, and inversely proportional to the length of the fragments into which the tree trunk is divided. The motion of sawn tree stem is considered when its butt is uniformly lifting by a gripper of the manipulator. Maximal bending and torsion stresses emerging in the wood are analyzed.

Key words: tree stem, manipulator, tree stem model, torsion, bending, elasticity, stiffness, torsion stress, bending stress, resistance force, Lagrange equations.

Введение. В работах по исследованию динамики лесных погрузочно-транспортных машин [1, 2] модель ствола дерева представляет собой простую двух- или трехмассовую механическую систему, которая движется в плоско-

сти, и, следовательно, учитываются только изгибные движения ствола дерева. Коэффициенты жесткости, определяющие деформацию такой модели ствола, находятся экспериментально из условия совпадения статического прогиба

ствола дерева и модели или совпадения амплитудно-частотных характеристик их колебаний. Однако в реальных технологических процессах ствол дерева движется в пространстве, и в этом случае, помимо изгибных, возникают деформации кручения. Очевидно, что отклонение формы кроны дерева от правильной геометрической и наличие естественной кривизны ствола дерева увеличивает вклад деформаций кручения в общую картину деформации ствола. Поэтому существует необходимость построения модели ствола дерева, которая могла бы адекватно описывать движение гибкого ствола дерева в трехмерном пространстве в различных технологических процессах лесозаготовок. В работе [3] построена трехмерная динамическая модель стержня переменного сечения для описания движения ствола дерева, представляющая собой набор жестких стержней, соединенных упругими связями, жесткости которых находились из условия равенства деформаций упругого стержня и модели. Разработанная модель применена к исследованию движения дерева в схвате манипулятора при различных режимах подъема [4].

Во многих работах при построении модели ствола материал древесины считался изотропным. Однако в действительности древесина является ортотропным материалом, в котором свойства в осевом направлении резко отличаются от свойств в радиальном и тангенциальном направлениях. В работе [5] рассмотрена модель деформирования стержня при наличии его плоских деформаций. При построении модели деформирования, а именно при нахождении коэффициентов жесткости, учитывалась ортотропность материала древесины. В предположении равенства упругих свойств древесины в радиальном и тангенциальном направлениях (трансверсально изотропная среда) было получено выражение для модуля продольной упругости и показано, что при деформации растяжения в осевом направлении отклонение от изотропности древесины не приводит к качественным отличиям от поведения стержня из изотропного материала. Целью данной работы является исследование влияния трансверсальности материала древесины на величину коэффициентов жесткости на кручение ствола дерева и исследование деформации кручения ствола дерева при его взаимодействии со схватом манипулятора при подъеме дерева.

Коэффициенты жесткости на кручение. Для определения коэффициентов жесткости сочленений на кручение рассмотрим деформацию кручения ствола дерева. Аналогично работе [5] будем полагать, что свойства древесины в радиальном и тангенциальном направлениях

не сильно отличаются. Например, для древесины сосны модуль продольной упругости имеет величину порядка $E_a = 1,2$ ГПа, модуль упругости в радиальном направлении имеет величину $E_r = 0,051$ ГПа, а в тангенциальном направлении $E_t = 0,043$ ГПа. Из приведенных цифр видно, что модули упругости в радиальном и тангенциальном направлениях отличаются на величину порядка 15% и в первом приближении могут быть приняты равными, так как модуль в продольном направлении превосходит их более чем на порядок величины. Таким образом, будем рассматривать древесину как текстуру, обладающую группой симметрии $m \cdot \infty : m$, то есть как трансверсально изотропную среду. Тензор модулей упругости в этом случае характеризуется двумя тензорными инвариантами [6]: единичным тензором E и диадой единичных векторов вдоль оси ствола дерева \mathbf{e}_z^2 , и с учетом его симметрии по перестановкам индексов может быть представлен через пять линейно независимых упругих постоянных k_n (аналогов коэффициентов Ляме):

$$c_{ijkl} = k_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + k_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + k_3 (\delta_{ij} e_k e_l + \delta_{kl} e_i e_j) + k_4 (\delta_{ik} e_j e_l + \delta_{il} e_j e_k + \delta_{jl} e_i e_k + \delta_{jk} e_i e_l) + k_5 e_i e_j e_k e_l, \quad (1)$$

где δ_{ij} – символы Кронекера; e_j – составляющие вектора \mathbf{e}_z в выбранном базисе.

В дальнейшем воспользуемся цилиндрической системой координат, так что $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$, а индексы в формуле (1) могут принимать значения r, φ, z .

Модули упругости древесины достаточно велики, так что относительные деформации можно рассматривать как малые величины, и при формулировке материальных уравнений ограничиться линейным приближением. В соответствии с обобщенным законом Гука для тензора напряжений следует выражение:

$$\sigma_{ij} = k_1 \delta_{ij} u_{ll} + 2k_2 u_{ij} + k_3 (\delta_{ij} e_k e_l + \delta_{kl} e_i e_j) u_{kl} + 2k_4 (u_{il} e_j e_l + u_{jl} e_i e_l) + k_5 u_{kl} e_k e_l e_i e_j, \quad (2)$$

где u_{ij} – тензор деформаций, а по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Учитывая, что вектор \mathbf{e}_z имеет лишь одну ненулевую составляющую, выражение для тензора напряжений можно переписать в виде:

$$\sigma_{ij} = k_1 \delta_{ij} u_{ll} + 2k_2 u_{ij} + k_3 (\delta_{ij} u_{zz} + \delta_{iz} \delta_{jz} u_{ll}) + 2k_4 (u_{iz} \delta_{jz} + u_{jz} \delta_{iz}) + k_5 u_{zz} \delta_{iz} \delta_{jz}, \quad (3)$$

где $u_{ll} = u_{rr} + u_{\varphi\varphi} + u_{zz}$, а в качестве индексов i и j следует понимать r, φ, z .

Тензор деформаций в цилиндрической системе координат определяется через проекции вектора смещения u на соответствующие направления соотношениями [7]:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ u_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ u_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \quad u_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим кручение круглого стержня вокруг оси симметрии, совпадающей с его продольной осью. Предполагая, как и в случае кручения круглого цилиндрического стержня из изотропного материала, что при кручении поперечные сечения остаются плоскими, для смещений точек стержня запишем соотношения:

$$u_\varphi = rz\gamma, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad (5)$$

где γ – угол поворота сечения, отнесенный к единице длины стержня.

Согласно соотношениям (4) находим, что единственным отличным от нуля компонентом тензора деформаций является $u_{\varphi z} = r\gamma/2$ и, соответственно, $\sigma_{\varphi z} = (k_2 + k_4)r\gamma$. При этом граничные условия на боковой поверхности (давление равно нулю) удовлетворяются тождественно, а для их удовлетворения на торцах цилиндрического образца касательные внешние усилия должны быть распределены по закону

$$\tau_{\varphi z} = (k_2 + k_4)r\gamma. \quad (6)$$

Иными словами, в соответствии с принципом Сен Венана такое распределение напряжений в образце достигается на некотором удалении от его торцов, где крутящий момент может быть приложен произвольным образом. Его величина определяется интегрированием моментов касательных усилий по площади поперечного сечения, что приводит к результату

$$M_{кр} = GJ_p\gamma, \quad G = k_2 + k_4, \quad J_p = \pi R^4 / 2, \quad (7)$$

где G – модуль сдвига; J_p – полярный момент инерции площади поперечного сечения в виде круга радиуса R .

Полученное выражение совпадает с таковым для стержня из изотропного материала с тем отличием, что выражение для модуля сдвига содержит дополнительный коэффициент Ляме. Для изотропного материала $k_4 = 0$ и $G = k_2 = \mu$, как и должно быть.

Таким образом, угол закручивания участка стержня длиной Δl определяется выражением

$$\gamma_1 = M_{кр} \Delta l / GJ_p. \quad (8)$$

Сопоставляя это выражение с углом закручивания упругой связи между элементами, на которые разбивается ствол дерева,

$$\gamma_1 = M_{кр} / c_{i3}, \quad (9)$$

находим выражение для коэффициента жесткости упругой связи при кручении

$$c_{i3} = GJ_p / \Delta l, \quad (10)$$

то есть жесткость на кручение, как и при изгибе, оказывается обратно пропорциональной длине элементов, на которые разбивается ствол дерева. Модуль сдвига является непосредственно измеряемой упругой характеристикой.

Полученную формулу (10) для жесткости на кручение можно использовать для моделирования динамики упругих стержней с различными поперечными сечениями и значениями модуля сдвига.

Результаты моделирования движения дерева. Представим механическую систему ствол дерева – манипулятор в виде модели, показанной на рис. 1.

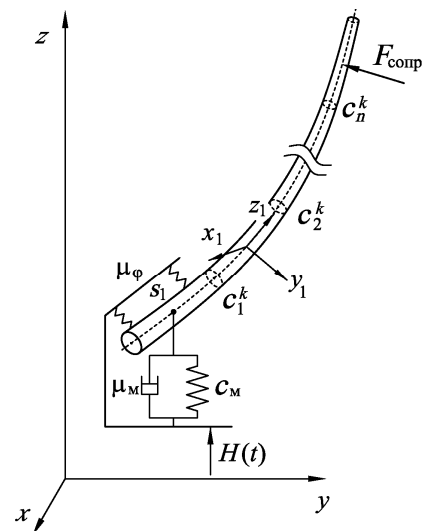


Рис. 1. Модель ствола дерева и манипулятора

Ствол дерева разбивается на некоторое число недеформируемых фрагментов, соединенных между собой упругими связями, которые могут моделировать деформации изгиба и кручения. Данная модель, составление уравнений движения для нее и алгоритм интегрирования полученных уравнений движения, а также численные величины, описывающие свойства манипулятора, подробно рассмотрены в работе [4]. На динамическую систему ствол дерева – манипулятор накладывалось кинематическое

возмущение $H(t)$ в виде его вертикального перемещения по закону

$$H(t) = vt,$$

где v – скорость подъема ствола дерева ($v = 1$ м/с).

Воздействие кроны на движение ствола моделировалось силой сопротивления, приложенной к последним стержням модели в соответствии с ее расположением. Силу сопротивления воздуха, действующую на крону дерева, полагаем линейной по скорости [8].

Исследуем распределение по длине ствола максимальных напряжений изгиба и кручения, возникающих в стволе дерева, не имеющего естественной кривизны, при его перемещении в схвате манипулятора.

Для уменьшения времени моделирования помимо скорости подъема основания ствола манипулятором зададим начальную угловую скорость поворота ствола относительно оси y (рис. 2), равную 0,5 рад/с.

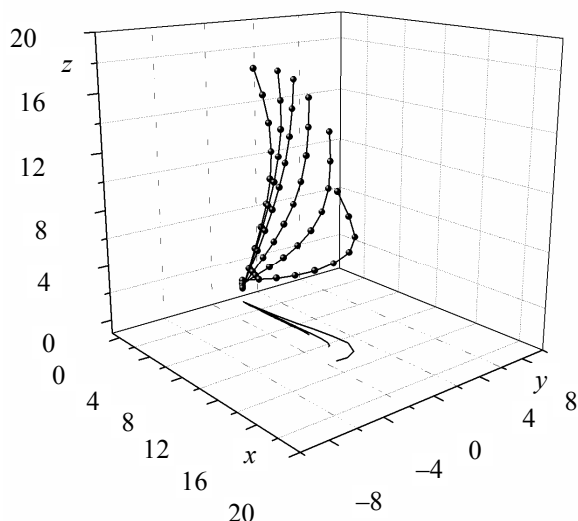


Рис. 2. Траектория движения дерева через каждую секунду после начала падения (координаты заданы в метрах)

Для определения силы сопротивления движению кроны дерева использовался коэффициент сопротивления кроны сосны, найденный в работе [8]. Параметры ствола дерева принимались следующие: длина ствола $l = 20$ м, диаметр ствола у основания $d = 24$ см, у вершины $d_k = 5$ см, модуль упругости древесины $E = 1,2 \cdot 10^{10}$ Па, модуль сдвига $G = 0,4 \cdot 10^9$ Па, плотность древесины $\rho = 780$ кг/м³. Масса определялась исходя из объема ствола и плотности древесины. Во всех дальнейших расчетах ствол дерева разбивался на 10 цилиндров.

В результате моделирования движения ствола дерева получены положение осевой линии в любой момент времени, а следовательно,

и вектор деформаций $\mathbf{u}^i(s, t)$ для каждого сочленения модели. Первые две компоненты u_1^i , u_2^i определяют деформации изгиба относительно двух взаимно перпендикулярных направлений, а третья u_3^i – деформацию кручения. По известным компонентам вектора деформации могут быть найдены значения изгибающих и крутящего моментов в сочленениях фрагментов модели:

$$M_1^i = c_1^i u_1^i, \quad M_2^i = c_2^i u_2^i, \quad M_3^i = c_3^i u_3^i,$$

где c_1^i и c_2^i – коэффициенты жесткости i -го сочленения на изгиб; c_3^i – на кручение.

Максимальные изгибающие напряжения в местах сочленений определяются по формуле

$$\sigma_{\max \text{ изг}}^i = \sqrt{(M_1^i)^2 + (M_2^i)^2} / W^i,$$

где W^i – осевой момент сопротивления i -го сечения.

Максимальные напряжения кручения в местах сочленений можно определить согласно соотношению

$$\tau_{\max}^i = M_3^i / W_p^i,$$

где W_p^i – полярный момент сопротивления i -го сечения.

На рис. 2 показана осевая линия ствола дерева и ее проекции на горизонтальную плоскость в различные моменты времени. Можно видеть, что в процессе движения под действием сил сопротивления движению кроны и сил инерции ствол дерева искривляется и отклоняется от плоскости первоначального расположения. Результатом такого движения будет также возникновение деформаций кручения ствола.

На рис. 3 показано распределение напряжений изгиба вдоль ствола дерева в различные моменты времени. Максимальные напряжения возникают в начале подъема, после первой секунды, что обусловлено выбранным законом движения схвата – равномерным подъемом, что предполагает наличие больших ускорений в момент начала движения. Неравномерность распределения напряжений изгиба обусловлена сложным характером действующих сил.

С течением времени движение ствола под действием сил сопротивления становится близким к установившемуся, так что изменение распределения напряжений по длине ствола с течением времени качественно мало изменяется, а распределение для моментов времени 5 (на рис. 3 не показано) и 6 с практически не отличаются и численно.

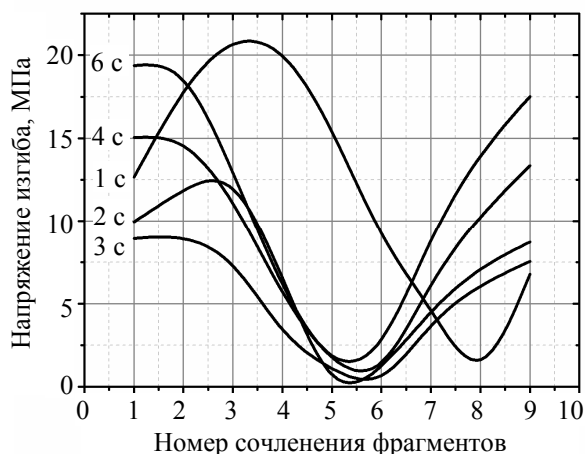


Рис. 3. Распределение изгибающих напряжений вдоль ствола дерева

На рис. 4 показано распределение напряжений кручения вдоль ствола дерева в различные моменты времени.

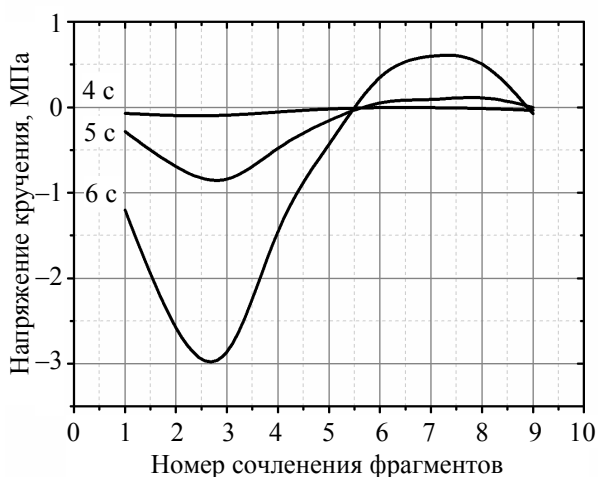


Рис. 4. Распределение напряжений кручения вдоль ствола дерева

Вследствие того, что начальные условия моделирования движения определяют движение дерева в одной плоскости, деформации и,

соответственно, напряжения кручения в начале движения практически полностью отсутствуют. Их наличие вызывается неизбежными небольшими погрешностями численных вычислений деформации осевой линии и большими величинами коэффициентов жесткости на кручение. При дальнейшем моделировании эти погрешности, которые можно трактовать как случайные факторы в естественной среде, и сложное нагружение упругого стержня вызывают выход ствола дерева из плоскости, что приводит к пространственной деформации осевой линии и, соответственно, появлению напряжений кручения. Сопоставляя величины напряжений кручения и изгиба, отметим, что напряжения кручения значительно меньшие по абсолютной величине и не могут привести к разрушению ствола дерева при его движении в манипуляторе на режиме подъема. Однако в представленных выше расчетах не учтен ряд случайных природных факторов, которые могут изменить картину распределения напряжений. В частности, не учтено наличие естественной кривизны ствола дерева, отклонение формы кроны от правильной геометрической. Указанные выше факторы неизбежно приведут к увеличению напряжений кручения, и для определения их величины необходимы дополнительные исследования.

Заключение. На основании представлений о материале древесины как трансверсально изотропной среде получено выражение для модуля сдвига. Показано, что это выражение совпадает с таковым для изотропного материала с тем отличием, что оно содержит дополнительный коэффициент Ляме. Получено выражение для коэффициента жесткости на кручение для модели стержня Коссера. Проведено моделирование движения ствола дерева в схвате манипулятора. Получены графики распределения напряжений изгиба и кручения вдоль ствола дерева. Показано, что напряжения кручения по абсолютной величине значительно меньше напряжений изгиба.

Литература

1. Голякевич С. А. Математическая модель для оценки нагруженности несущих конструкций многооперационных лесозаготовительных машин // Труды БГТУ. 2013. № 2: Лесная и деревообраб. пром-сть. С. 72–78.
2. Арико С. Е. Моделирование процесса взаимодействия крон деревьев при их валке / С. Е. Арико // Труды БГТУ. 2011. № 2: Лесная и деревообраб. пром-сть. С. 127–131.
3. Борисевич С. А., Камлюк А. Н. Модель гибкого стержня в трехмерном пространстве и ее применение для описания динамики падения ствола дерева // Известия Нац. академии наук Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2012. № 2. С. 69–74.
4. Борисевич С. А. Моделирование взаимодействия ствола дерева со схватом манипулятора // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 53–57.
5. Борисевич С. А., Вихренко В. С. Анализ алгоритма численного интегрирования модели Коссера гибкого стержня // Теоретическая и прикладная механика. Минск: БНТУ, 2016. № 31. С. 196–203.

6. Лохин, В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных элементов // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 393–417.
7. Амензаде, Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
8. Борисевич С. А., Камлюк А. Н., Ребко Д. В. Определение сопротивления движению кроны дерева // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 34–36.

References

1. Golyakevich S. A mathematical model for estimating loading of bearing structures multioperational logging machines / S. Golyakevich // *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 2: Forest and Woodworking Industry, pp.72–78 (In Russian).
2. Ariko S. Modeling the interaction of tree crowns in their logging // *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2011, no. 2: Forest and Woodworking Industry, pp. 127–131 (In Russian).
3. Borisevich S. A., Kamluk A. N. The flexible rod model in three-dimensional space and its application to investigations of the tree stem dynamics [Izvestiya Nacional'noj akademii nauk Belarusi], series Physics and Mathematics Sciences, 2012, pp. 69–74 (In Russian).
4. Borisevich S. A. Modeling the interaction of a tree trunk with a gripper arm // *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical science and informatics, pp. 34–36 (In Russian).
5. Borisevich S. A., Vikhrenko V. S. The analysis algorithm of numerical integration of the model of the Cosserat flexible rod. Belarusian National Technical University. Theoretical and Applied Mechanics, 2016, no. 31, pp. 196–203 (In Russian).
6. Lokhin V. V., Sedov L. I. Nonlinear tensor functions of several tensor arguments [Prikladnaya matematika i mekhanika], 1963, vol. 27, pp. 597–629 (In Russian).
7. Amenzade Y. A. [Theory of elasticity]. Moscow, Visshaya shkola Publ., 1976. 272 p.
8. Borisevich S. A., Kamluk A. N., Rebko D. V. Determination of the resistance to the moving tree crown. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical science and informatics, pp. 34–36 (In Russian).

Информация об авторах

Борисевич Сергей Анатольевич – ассистент кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borsera@belstu.by

Вихренко Вячеслав Степанович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vvikhre@mail.ru

Information about the authors

Borisevich Sergei Anatol'yevich – assistant lecturer of the Department of Informatics and Computer Graphics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borsera@belstu.by

Vikhrenko Vyacheslav Stepanovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vvikhre@mail.ru

Поступила 15.03.2016